Soluciones del Primer Parcial de Física II

1) Primero calculo el campo generado por un disco de radio a y carga Q en un punto de su eje a distancia z del mismo. Para esto, considero el disco como una colecciónde anillos concéntricos de radios entre 0 y a. El campo generado por un anillo de radio r y densidad de carga

$\sigma = \dfrac{Q}{\pi a^2}$ en el eje z estará dado por :

$$dE_z = \frac{z\,dQ}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z\,\sigma\,2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z(Q/\pi a^2)\pi r\,dr}{2\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z\,Q\,r\,dr}{2\pi a^2 \varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}}$$

(Observe que para cada anillo solamente tengo componente vertical del campo, ya que las componentes horizontales se anulan por simetría)

Integro en el radio:

$$E_z = \int dE_z = \int_0^a \frac{z\,Q\,r\,dr}{2\pi a^2 \varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{2\pi a^2}\left[\frac{-1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]_0^a$$

$$E_z = \frac{Qz}{2\pi a^2}\left[\frac{-1}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{1}{z}\right] = \frac{Q}{2\pi a^2}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}} + 1\right]$$

La fuerza sobre la varilla será la integral de la fuerza sobre cada porción de carga de la misma, estando dicha carga dada por:

$$dq = \lambda\,dz = \frac{q}{a}dz$$

La fuerza experimetada por cada elemento de carga, dF (orientada verticalmente hacia arriba) será:

$$dF = \frac{dq\,Q}{2\pi a^2}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right] = \frac{\lambda\,dz\,Q}{2\pi a^2}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right] = \frac{(q/a)\,dz\,Q}{2\pi a^2}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right] = \frac{q\,Q\,dz}{2\pi a^3}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right]$$

Integrando en la longitud de la varilla:

$$F = \int dF = \int_0^a \frac{q\,Q\,dz}{2\pi a^3}\left[\frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right] = \frac{q\,Q}{2\pi a^3}\left[-\sqrt{a^2+z^2}+z\right]_0^a$$

$$F = \frac{q\,Q}{2\pi a^3}\left[-\sqrt{2\mathrm{a}^2}+a+\sqrt{a^2}\right] = \frac{q\,Q}{2\pi a^3}\left[-\sqrt{2}\,a+2\,a\right]$$

$$F = \frac{q\,Q}{2\pi a^2}\left[2-\sqrt{2}\right]$$

2) Primero calculo el campo eléctrico por Gauss, y luego hallo el potencial. Asumo $L \gg r,a$ Considero como superficies Gaussianas, los cilindros de radio r con el mismo eje del cilindro cargado. El flujo en uno de dichos cilindros sólo se dará en la cara lateral, dado que estoy despreciando efectos de borde ($L \gg r,a$ radios de interés).

La carga encerrada en uno de estos cilindros de radio r (y longitud L) será:

$$Q(r)=\int \rho(r)\,dV=\int_0^r \frac{3Q(a-r)}{\pi a^3 L}2\pi r L\,dr=\int_0^r \frac{6Q(ar-r^2)}{a^3}dr=\frac{6Q}{a^3}\left[\frac{-r^3}{3}+\frac{ar^2}{2}\right]$$

En particular, la carga total encerrada por el cilindro cargado es

$$Q(a)=\frac{6Q}{a^3}\left[\frac{-a^3}{3}+\frac{a^3}{2}\right]=\frac{6Q}{a^3}\left[\frac{-2a^3}{6}+\frac{3a^3}{6}\right]=\frac{6Q}{a^3}\left[\frac{a^3}{6}\right]=Q$$

El campo solo depende del radio del cilindro, por lo cual, el flujo del campo eléctrico para uno de estos cilindros estará dado por el producto del campo por la superficie lateral del cilindro donde hay flujo no nulo: $\Phi_E=E(r)2\pi r L$.

Aplicando Gauss tengo, para $r\leq a$:

$$\Phi_E=2E(r)\pi r L=\frac{Q(r)}{\varepsilon_0}=\frac{6Q}{\varepsilon_0 a^3}\left[\frac{-r^3}{3}+\frac{ar^2}{2}\right]$$

Luego el campo eléctrico para $r\leq a$

$$E(r)=\frac{3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\frac{-r^2}{3}+\frac{ar}{2}\right]$$

Análogamente, aplicando Gauss para $r>a$, tenemos:

$\Phi_E=2E(r)\pi r L=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, por lo cual $E(r)=\dfrac{Q}{2\pi r L\varepsilon_0}$ en este caso.

Primitivizando, para $r\leq a$ el potencial eléctrico será:

$$V(r)=-\int E(r)=\frac{3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\frac{r^3}{9}-\frac{ar^2}{4}\right]+c_1$$

donde c_1 es una constante a ajustar, para cumplir con la referencia $V(a)=0$

Luego $c_1=-V(a)=\dfrac{-3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\dfrac{a^3}{9}-\dfrac{a^3}{4}\right]=\dfrac{-3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\dfrac{4a^3}{36}-\dfrac{9a^3}{36}\right]=\dfrac{3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\dfrac{5a^3}{36}\right]$

o sea $V(r)=\dfrac{3Q}{\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[\dfrac{r^3}{9}-\dfrac{ar^2}{4}+\dfrac{5a^3}{36}\right]=\dfrac{Q}{12\varepsilon_0\pi a^3 L}\left[4r^3-9ar^2+5a^3\right]$ para $r\leq a$.

Analogamente, para $r>a$ tenemos $V(r)=\dfrac{-Q}{2\pi L\varepsilon_0}\log(r)+c_2$.

Tomando la referencia de $V(a)=0$, tenemos $c_2=-V(a)=\dfrac{Q}{2\pi L\varepsilon_0}\log(a)$, o sea que

$$V(r)=\frac{-Q}{2\pi L\varepsilon_0}\log(r/a)\quad \text{para} \quad r>a .$$

3) Primero calculo la carga del capacitor, al conectarlo a la fuente:

$Q = CV = \frac{A\varepsilon_0 V}{d}$, donde utilizamos que la capacidad inicial del condensador es $C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$

Al desconectar el capacitor, este queda aislado, por lo cual de ahí en más la carga se conserva.
Al separar las placas hasta que la distancia entre ellas sea $2d$, la capacidad del capacitor pasa a ser $C' = \frac{A\varepsilon_0}{2d} = \frac{C}{2}$, luego la carga ahora verifica: $Q' = C'V' = \frac{A\varepsilon_0 V'}{2d} = \frac{CV'}{2}$. Pero como la carga se conserva, $Q' = Q$, por lo cual la diferencia de potencial final será $V' = 2V$ el doble del voltaje de la fuente con que fue cargado originalmente (esto contesta (a)).

La energía inicial almacenada se calcula como $U = \frac{CV^2}{2} = \frac{A\varepsilon_0 V^2}{2\mathrm{d}}$, y la energía final como $U' = \frac{C'V'^2}{2} = \frac{C}{2}\frac{(4V^2)}{2} = CV^2 = \frac{A\varepsilon_0 V^2}{d} = 2U$ (esto contesta (b)). Finalmente, el trabajo necesario para separar las placas, da cuenta del aumento de la energía almacenada en el condensador, o sea que $W = \Delta U = U' - U = 2U - U = U = \frac{CV^2}{2} = \frac{A\varepsilon_0 V^2}{2\mathrm{d}}$ (esto contesta (c)).