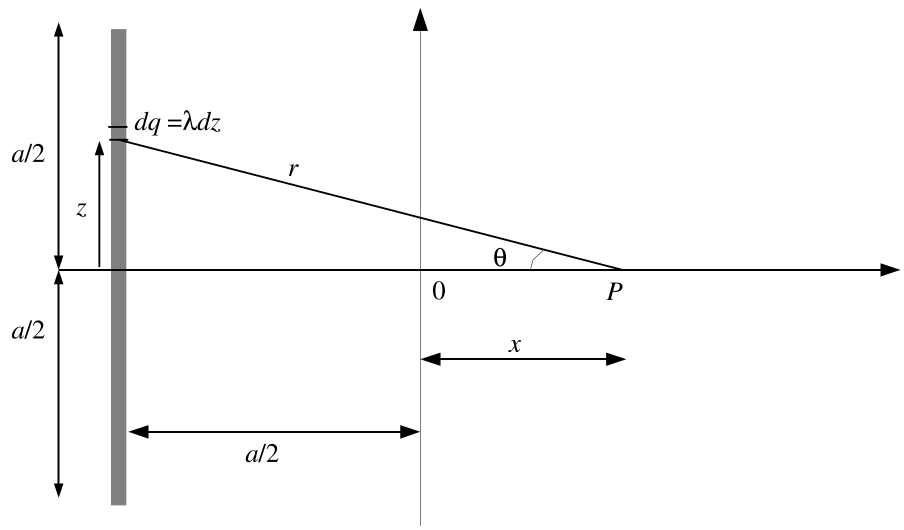
Soluciones del Examen de Diciembre de 2009 de Física II para Licenciaturas en Física, Astronomía y Matemática.

Ejercicio 1

a) Primero hallo el potencial V_1 de la barra vertical, con la referencia de que el potencial en el infinito sea cero.



En el dibujo, el ángulo θ verifica que $\cos(\theta)=\frac{x+a/2}{r}$, y la distancia r está dada por

$$r=\sqrt{(x+a/2)^2+z^2} \quad .$$

Luego, el potencial generado por un diferencial $dq=\lambda dz$ de carga será

$$dV_1=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda\, dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a/2)^2+z^2}}$$

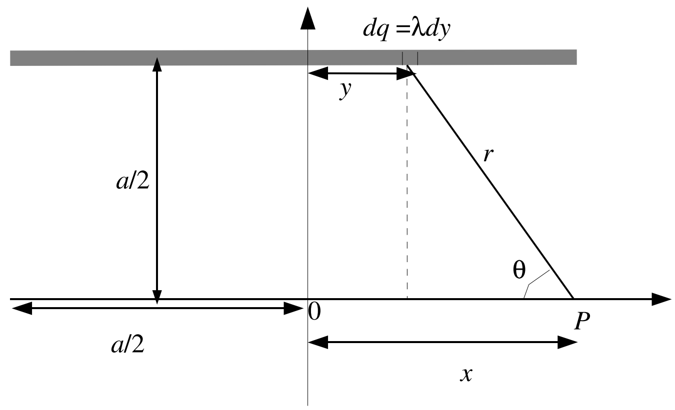
Integrando en la barra:

$$V_1=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dz}{\sqrt{(x+a/2)^2+z^2}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z+\sqrt{(x+a/2)^2+z^2}\right)\right]_{-a/2}^{a/2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{a+\sqrt{(2x+a)^2+a^2}}{-a+\sqrt{(2x+a)^2+a^2}}\right]$$

Para las 2 barras verticales, por simetría los potenciales serán iguales, o sea $V_2=V_3$.

En el dibujo de abajo, el ángulo θ verifica que $\cos(\theta)=\frac{x-y}{r}$, y la distancia r está dada por

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4(x-y)^2+a^2} \quad .$$



Luego, el potencial generado por un diferencial $dq=\lambda dy$ de carga será

$$dV_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda\, dy}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{4(x-y)^2+a^2}}$$

Integrando en la barra:

$$V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dy}{\sqrt{4(x-y)^2+a^2}}$$

Utilizando el cambio de variables $u=2(x-y)$, tenemos $du=-2\,dy$ y $u(-a/2)=2\mathrm{x}+a$ y $u(a/2)=2\mathrm{x}-a$. Sustituyendo en la integral:

$$V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{2\mathrm{x}+a}^{2\mathrm{x}-a}\frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2\mathrm{x}-a}^{2\mathrm{x}+a}\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\right]_{2\mathrm{x}-a}^{2\mathrm{x}+a}$$

$$V_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{2\mathrm{x}+a+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}{2\mathrm{x}-a+\sqrt{(2\mathrm{x}-a)^2+a^2}}\right]$$

El potencial es la suma de los tres términos $V=V_1+V_2+V_3$.

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left[\frac{a+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}{-a+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}\right]+2\ln\left[\frac{2\mathrm{x}+a+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}{2\mathrm{x}-a+\sqrt{(2\mathrm{x}-a)^2+a^2}}\right]\right]$$

b) El potencial calculado en (a) es un potencial restricto al eje x, $V=V(x)$. Como por simetría el campo eléctrico es de la forma $\vec{E}=E_x\hat{i}$, puedo calcular $E_x=\frac{-\partial V}{\partial x}=V'(x)$. Esto no sería así si no fueran nulas las otras componentes del campo, ya que éstas no se pueden obtener del potencial $V(x)$ restringido hallado en (a).

Si no, también se puede hallar E_x por integración directa. Análogamente a lo que ocurría con el potencial, tenemos $E_x=E_{x1}+E_{x2}+E_{x3}$ por superposición lineal, y por simetría $E_{x2}=E_{x3}$ para las barras horizontales.

Utilizando la referecia del primer dibujo, para la barra vertical tenemos:

$$dE_{x1}=\frac{\cos(\theta)dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(x+a/2)dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\lambda(x+a/2)dz}{4\pi\varepsilon_0\left[(x+a/2)^2+z^2\right]^{3/2}}=\frac{\lambda(2\mathrm{x}+a)dz}{\pi\varepsilon_0\left[(2\mathrm{x}+a)^2+4\mathrm{z}^2\right]^{3/2}}$$

Integrando en la barra:

$$E_{x1}=\frac{\lambda(2\mathrm{x}+a)}{\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dz}{\left[(2\mathrm{x}+a)^2+4\mathrm{z}^2\right]^{3/2}}$$

Utilizando el cambio de variables $u=2\mathrm{z}$, tenemos $du=2\,dz$ y $u(-a/2)=-a$ y $u(a/2)=a$. Sustituyendo en la integral:

$$E_{x1}=\frac{\lambda(2\mathrm{x}+a)}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{du}{\left((2\mathrm{x}+a)^2+u^2\right)^{3/2}}=\frac{\lambda(2\mathrm{x}+a)}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{u}{(2\mathrm{x}+a)^2\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+u^2}}\right]_{-a}^{a}$$

$$E_{x1}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a}{(2\mathrm{x}+a)+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}\right]$$

Ahora calculo para la barra horizontal, utilizando de referencia el segundo dibujo.

$$dE_{x2}=\frac{\cos(\theta)dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(x-y)dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{8\lambda(x-y)dy}{4\pi\varepsilon_0\left[4(x-y)^2+a^2\right]^{3/2}}=\frac{2\lambda(x-y)dy}{\pi\varepsilon_0\left[4(x-y)^2+a^2\right]^{3/2}}$$

Integrando en la barra:

$$E_{x2}=\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{(x-y)dy}{\left[4(x-y)^2+a^2\right]^{3/2}}$$

Utilizando el cambio de variables $u=2(x-y)$, tenemos $du=-2\,dy$ y $u(-a/2)=2\mathrm{x}+a$ y $u(a/2)=2\mathrm{x}-a$. Sustituyendo en la integral:

$$E_{x2}=\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\int_{2\mathrm{x}+a}^{2\mathrm{x}-a}\frac{(u/2)(-1/2)du}{\left[u^2+a^2\right]^{3/2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{2\mathrm{x}-a}^{2\mathrm{x}+a}\frac{u\,du}{\left[u^2+a^2\right]^{3/2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{u^2+a^2}}\right]_{2\mathrm{x}-a}^{2\mathrm{x}+a}$$

$$E_{x2}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{(2\mathrm{x}-a)^2+a^2}}\right]$$

Entonces, el campo eléctrico total será $E_x=E_{x1}+E_{x2}+E_{x3}=E_{x1}+2E_{x2}$:

$$E_x=\frac{\lambda}{\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{a}{(2\mathrm{x}+a)+\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}+\frac{-1}{\sqrt{(2\mathrm{x}+a)^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{(2\mathrm{x}-a)^2+a^2}}\right]$$

Ejercicio 2

El flujo magnético a través del círculo interno de radio R_1 estará dado por $\Phi_B=\pi\,R_1^2\,B$. Su derivada temporal será entonces $\frac{d\,\Phi_B}{dt}=\pi\,R_1^2\frac{dB}{dt}$. Sea $\beta=\frac{dB}{dt}=0{,}2\,T/s$.

Por la ley de Faraday se cumple $\oint_C\vec{E}\,.\,d\,\vec{l}=\frac{-d\,\Phi_B}{dt}$, por lo cual tenemos, utilizando la simetría que $2\pi\,R_2\,E=\pi\,R_1^2\,\beta$. Entonces el campo eléctrico sobre el riel será tangencial, de sentido horario (ley de Lenz), y con módulo dado por $E=\frac{R_1^2\beta}{2\,R_2}$.

Escribo la segunda cardinal para q_1:

$$R_2^2 m\,\dot{\omega}_1=R_2\,q_1\,E=\frac{q_1 R_1^2\beta}{2}$$

Entonces la aceleración angular de la carga 1 será:

$$\dot{\omega}_1=\frac{q_1 R_1^2\beta}{2\,R_2^2 m}=\alpha_1$$

Análogamente para la carga 2 tendremos:

$$\dot{\omega}_2=\frac{q_2 R_1^2\beta}{2\,R_2^2 m}=\alpha_2=\frac{4\,q_1\,R_1^2\beta}{2\,R_2^2 m}=\frac{2\,q_1\,R_1^2\beta}{R_2^2 m}=4\,\alpha_1$$

Las leyes horarias de las cargas, que parten del reposo, entonces se escriben como:

$$\theta_1=\frac{\alpha_1\,t^2}{2}+\pi$$

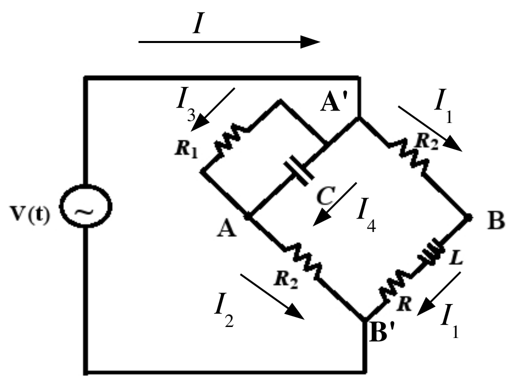
$$\theta_2=2\,\alpha_1\,t^2$$

donde medimos el ángulo θ respecto al punto de partida de q_2 y en sentido horario.

La condición de choque, $\theta_1=\theta_2$, resulta en $\frac{3\alpha_1\,t^2}{2}=\pi$, por lo cual, el instante del choque queda como $\quad t=\sqrt{\dfrac{2\pi}{3\alpha_1}}=\sqrt{\dfrac{4\pi R_2^2 m}{3R_1^2\beta q_1}}\approx 72\,ms$.

Ejercicio 3

a) En el dibujo se muestran los sentidos de las corrientes consideradas:



Trabajaremos en los complejos, de modo que, el potencial complejo será $V(t)=V_0 e^{i\omega t}$.

La ley de nudos nos da estas 2 ecuaciones:

$I=I_1+I_2 \quad (1)$

$I_2=I_3+I_4 \quad (2)$

Aplicando la ley de mayas obtenemos otras 3:

$$(R+R_2)I_1+L\frac{dI_1}{dt}=R_2 I_2+R_1 I_3 \quad (3)$$

$$(R+R_2)I_1+L\frac{dI_1}{dt}=V_0 e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$R_1 I_3=\frac{Q_4}{C} \quad (5)$$

Como $V_A=V_B$, entonces $V_{AA'}=V_{BA'}$, por lo tanto:

$$R_2 I_1=\frac{Q_4}{C} \quad (6)$$

siendo A' el nudo señalado en el dibujo.

Como estamos en régimen, las intensidades complejas se escribirán como:

$I=A e^{i\omega t}$, $I_1=B e^{i\omega t}$, $I_2=D e^{i\omega t}$, $I_3=E e^{i\omega t}$ y $I_4=F e^{i\omega t}$.

En particular: $Q_4=\dfrac{F e^{i\omega t}}{i\omega}$ y $\dfrac{dI_1}{dt}=i\omega B e^{i\omega t}$.

Sustituyendo en las ecuaciones, y eliminando las exponenciales, tenemos el siguiente sistema:

$A = B + D$ (1')

$D = E + F$ (2')

$[(R_2 + R) + i\omega L]B = R_2 D + R_1 E$ (3')

$[(R_2 + R) + i\omega L]B = V_0$ (4')

$\frac{F}{i\omega C} = R_1 E$ (5')

$\frac{F}{i\omega C} = R_2 B$ (6')

(Los números de ecuación marcan ecuaciones correspondientes)

Utilizando la ecuación (4'), podemos despejar $B = \frac{V_0}{[(R_2 + R) + i\omega L]}$. pero a su vez, utilizando el resto de las ecuaciones, podemos llegar a $B = \frac{R_1}{R_2}\frac{V_0}{[(R_1 + R_2) + i\omega C R_1 R_2]}$. Entonces, como ambos valores deben ser el mismo, tenemos, igualando partes real e imaginaria:

$R_1(R_2 + R) = R_2(R_1 + R_2)$ (7)

$i\omega R_1 L = i\omega C R_1 R_2^2$ (8)

Entonces de (7) obtenemos $R = \frac{R_2^2}{R_1}$ y de (8) resulta $L = C R_2^2$.

b) Utilizando los resultados anteriores, tenemos $B = \frac{R_1}{R_2}\frac{V_0}{[(R_1 + R_2) + i\omega C R_1 R_2]}$.

La intensidad en la resistencia *R* será $I_1 = \Re(B e^{i\omega t}) = |B|\cos(\omega t + \delta_B)$

donde $|B| = \frac{R_1}{R_2}\frac{V_0}{[(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2 R_2^2]^{1/2}}$ y $\tan(\delta_B) = \frac{-\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

c) La potencia instantánea disipada por R está dada por $Pot_R = R\,I_1^2 = \frac{R_2^2}{R_1}\left|B^2\right|\cos^2(\omega t + \delta_B)$. Para calcular la potencia media, integro sobre un período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, y divido por T:

$$\langle Pot_R \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T R\,I_1^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{R_2^2}{R_1}\left|B^2\right|\cos^2(\omega t + \delta_B)\,dt = \frac{R_2^2}{2\,R_1}\left|B^2\right| = \frac{R_1\,V_0^2}{2[(R_1+R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2]}$$